

KoMáR - 6. ročník

2017/2018

1. a 2. série

Ahoj!

Baví tě matematika? Máš rád řešení problémů, u kterých musíš použít hlavu? Díváš se na SPZ-ky aut a všímáš si těch, které jsou dělitelné 9-ti?

Pokud byla alespoň jedna z odpovědí ano a ty sám jsi ještě na základní škole (nebo v odpovídajícím ročníku víceletých gymnázií), pak je KoMáR určitě skvělý způsob, jak trávit nějaký ten volný čas. Při řešení získáš skvělou praxi a pokud budeš úspěšný, rozhodně tě neminou hezké ceny. Navíc, když s námi pojedíš na soustředění, můžeš potkat spoustu zajímavých lidí, zahrát si parádní hry a dozvědět se i něco zajímavého z matematiky. Máš chuť to zkusit? Tak do toho!

Chystané **podzimní soustředění** se bude konat o víkendu 10. - 12. 11. Tak si termín poznačte v kalendáři a přijďte. Moc se na Vás těšíme!

## Jak řešit

V každé sérii je osm příkladů, cílem však není vyřešit všechny, proto neváhej poslat byť i jediné řešení nebo jeho nástin. Důležité je řešení pečlivě okomentovat, pouze výsledek nebo zmatečná změť rovnic nemůže dostat plný počet bodů – pamatuj, že opravující musí ze tvého řešení pochopit tvůj tok myšlenek.

Každý vyřešený příklad sepiš na samostatný papír, na každý list se podepiš a uveď číslo úlohy, dej je do obálky a do termínu odeslání dané série je odešli na níže uvedenou adresu. My tvá řešení opravíme a se zadáním nové série, vzorovými řešeními a výsledkovou listinou ti je pošleme zpět. Odevzdávat můžeš i online prostřednictvím našich webových stránek.

Spolu s řešením první série nám pošli také svou adresu, kam ti máme posílat opravená řešení, a název školy a třídu, kde studuješ.

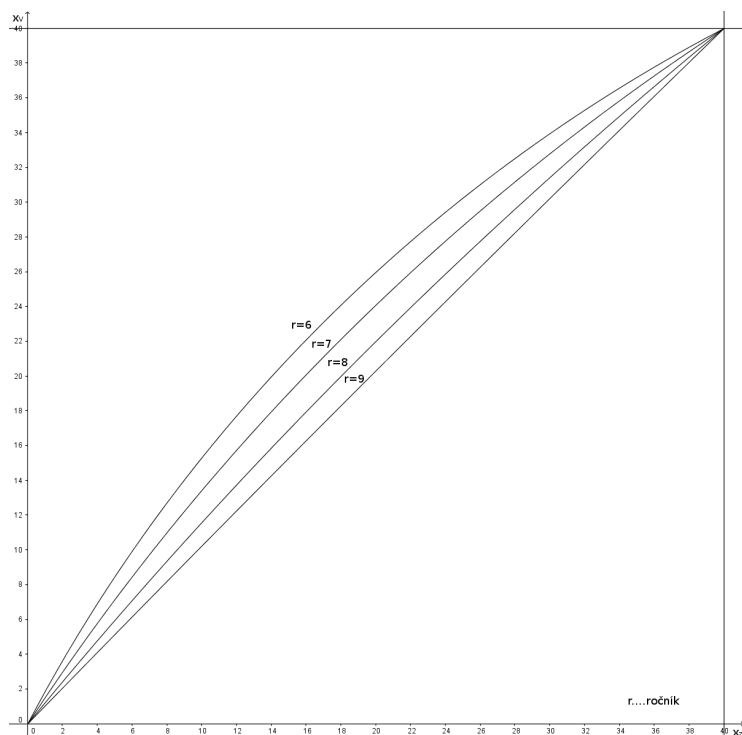
## Příklady a bodování

Příklady jsou seřazeny od nejjednoduššího k nejobtížnějšímu. Přičemž za 0. příklad můžete obdržet až 2 body, za 1.–5. můžete obdržet až 5 bodů, za 6. až 6 bodů a za 7. až 7 bodů. Aby nebyli žáci vyšších tříd příliš zvýhodněni, tak jsme se rozhodli body přepočítávat podle níže uvedeného vzorečku:

$$x_v = \sqrt{(m + km)^2 + (km)^2 - (x_z - m - km)^2} - km$$

kde  $x_v$  je výsledný počet bodů za sérii,  $x_z$  je součet získaných bodů za všechny úlohy a  $m$  je maximální možný počet bodů za sérii (tedy 40 bodů).  $k$  je koeficient závislý na ročníku podle následující tabulky:

Ročník	Hodnota
6.	1,4
7.	2,3
8.	5
9.	35



Řešení poslejte na adresu:

KoMáR

Gymnázium, Brno, tř. Kpt. Jaroše 14

658 70 Brno

S případnými dotazy ohledně semináře se můžete obracet na organizátory, jejichž email najdeš na našich stránkách: [www.komar.math.muni.cz](http://www.komar.math.muni.cz), nebo se obrať na číslo vedoucího projektu 777 182 312 Petra Pupíka nebo na číslo 722 115 934 hlavního organizátora Vítky.

Hodně štěstí nejen při řešení KoMáRa přejí Petr, Martin, Modrásek, Mája, Kačka, Barča, Danča, Honza, Tom, Vítek, Berenika a dva Vašci.

## Zadání První Série

Termín odevzdání: 30. října

Dobrý den. Asi bych se vám měla představit. Jmenuji se SARA a jsem osobní asistentka profesora Perikula. Nejsem tak docela člověk, dalo by se spíš říct, že jsem robot, ale na druhou stranu mě nedávno profesor upgradoval tak, že jsem od člověka k nerozeznání. Profesor mě už dávno nevládní, mám vlastní byt, volný čas a pracuji pro něj z vlastní vůle. Víkendy mám vždy volné.

**Úloha 0.** *SARA je humanoidní robot se svobodnou vůlí a dobrým vkusem. Dejte dohromady deset věcí, které ráda dělá o svých volných víkendech.*

Tenhle víkend je výjimka. Profesor Perikulus mi ráno poslal zprávu, ve které stálo jen „SARO, moc se omlouvám, buď za deset minut v laboratoři.“ Naštěstí nepotřebuji snít, takže jsem tam zvládla být za tři minuty.

„SARO, díky bohu, že jsi tady,“ pozdravil mě profesor. „Podívej,“ ukázal na obrazovku svého počítače. Byla na něm mapa města a zhruba na opačném konci, než stála profesorova laboratoř, bylo něco označeno.

„Co je to?“ zeptala jsem se hloupě, ale pak jsem si uvědomila, že i když je víkend, jsem pořád robot a mám přístup k veškeré technice v laboratoři.

**Úloha 1.** *SARA bleskově proskenovala všechnu techniku v místnosti. V místnosti se nacházely monitory a počítače, některé fungující bezdrátově, jiné připojené kabely. Jakou část techniky tvořily bezdrátové monitory, pokud jedna osmina přístrojů není bezdrátová a tři sedminy bezdrátových přístrojů tvoří počítače?*

Rychle jsem prošla data, která monitor zobrazuje, a ukázalo se, že profesor sledoval únik nebezpečných látek nad městem a v daném místě zaznamenal zvýšené úrovně antihmoty.

„Myslela jsem, že jsme jediní ve městě, kdo pracuje s antihmotou,“ podivila jsem se.

„To já taky.“ Profesor vypadal ustaraně. „Navíc, víš, co se nachází na tom místě?“

„Podle satelitních snímků je to jen nějaká oplocená louka,“ odpověděla jsem bleskově.

„Myslíš, že by ses tam mohla zajít podívat? Mám podezření, že-“

„Vím přesně, jaké podezření, profesore. Můžu si půjčit vznášedlo?“

Profesor se poškrábal na hlavě. „Není nakalibrované, ale když ho správně nastavíš...“

Nenechala jsem profesora dokončit větu a rozběhla jsem se do garáže. Přece jenom jsem chtěla, aby mi z víkendu něco zbylo.

**Úloha 2.** *Profesorovo vznášedlo je vlastně létající skútr, který ovládá autopilot. Aby správně fungoval, musí být jeho čtvercový ovládací panel vyplněn sedmi hady z čísel 1 až 9 popořadě. Sousedící čísla v jednom hadovi spolu musí sdílet jednu stranu, nestačí roh. Přitom musí platit, že v celé tabulce se žádné číslo ani diagonálně nedotýká stejného čísla. Proškrtnuté políčko nesmí být vyplněno žádným číslem.*

		1		4		2	
		7		X	5		
5			3				
	7					3	
		6			1		
	5			6	5		8
7							
	9			8			

Přistála jsem se vznášedlem na kraji oplocené louky, na které nebylo nic jiného než pár bodláků. Místo úniku antihmoty mělo být přímo uprostřed a vzduch... Vzduch se podivně vlnil. Pro jistotu jsem si přes oči přetáhla filtry proti neviditelným polím a málem jsem ztratila rovnováhu, když jsem před sebou spatřila gigantickou věž, která byla asi sto metrů vysoká a celkově připomínala spíše vesmírnou stanici než budovu.

Masivní vstupní dveře byly otevřené a za nimi bylo něco, co připomínalo hotelovou recepci. Všude se míhali lidé v pláštích a nikdo si mě nevyšímal. Došla jsem k výtahu a stiskla tlačítko na dotykové obrazovce, abych se někde ztratila dřív, než někdo zaregistruje moji přítomnost. Tlačítka na obrazovce zmizela a místo toho se na ní objevil proti-robotí test:

**Úloha 3.** *Představme si kouzelnou krabičku. Pokud do této krabičky vložíme některé přirozené číslo  $n$ , na víčku krabičky se objeví nějaké nezáporné celé číslo  $m$ , které je menší nebo rovno než  $(n-1)(n-1)/n$ . Navíc platí, že pro každou dvojici různých čísel, která do krabičky vložíme, nám krabička ukáže různá čísla. Zjistěte, jestli taková krabička může existovat.*

Otázka byla navržena tak, aby ji umělá inteligence nemohla vyřešit, ale když jsem napsala profesorovi, do deseti sekund jsem měla odpověď. Výtah přijel a já mohla dál prozkoumávat, co je tohle vůbec za místo. Výtahové dveře se za mnou zavřely a já byla v bezpečí. Tedy alespoň do doby, než jsem si uvědomila, že funguje na otisky prstů. Přesvědčila jsem se, že nikde není kamera, a vyrvala jsem ovládací panel ze zdi. Naštěstí mám s sebou vždycky spoustu náhradních součástek.

**Úloha 4.** *V každém čtverci za ovládacím panelem je určitý počet rezistorů. Z některých čtverců však úplně vypadly a panel je nyní nefunkční. Doplňte správné počty rezistorů do prázdných polí tak, aby byl jejich součet v každém čtverci  $2 \times 2$  stejný.*

	1	4	
	6		5
1		2	
	8	5	

Výtah se rozjel směrem vzhůru naprosto šnečí rychlostí a celý se lehce klepal. Měla jsem neblahé tušení, že hrubá síla v tomhle případě nebyla to nejlepší řešení. Snažila jsem se zabavit tím, že jsem si znova procházela příklady, na kterých profesor minulý týden měřil svoje IQ. Byly to příklady

typu: „Dokažte teorii relativity.“, „Dokažte, že překročení rychlosti světla umožňuje cestování časem.“, nebo

**Úloha 5.** *Dokažte, že pro všechna reálná  $x$  a  $y$  platí:  $y(y + 1) + x \geq (x + y)(y - x + 1)$ .*

Zničená kabina výtahu se nakonec zastavila úplně někde mezi prvním patrem, ze kterého jsem vyjela, a druhým patrem, kam bych se byla hodně ráda dostala. Rozhodla jsem se, že kabinu opustím, a vypálila jsem laserem díru ve stropě. V šachtě byla tma, ale s použitím nočního vidění jsem zjistila, že dveře druhého patra jsou jen dva metry nade mnou. Bohužel vypadaly velmi pevně a i odsud jsem viděla jejich elektronický zámek a tři bezpečnostní moduly, které ho zajišťovaly. Kdybych ho tak mohla zkratovat...

**Úloha 6.** *Ze tří bezpečnostních modulů  $A$ ,  $B$  a  $C$  je postupně vyslán impulz 1, 2, a 3. Moduly  $A$  a  $B$  i moduly  $A$  a  $C$  jsou od sebe vzdálené 34 cm. Mezi moduly  $B$  a  $C$  vede rovný kabel dlouhý 32 cm. Kolmo na tento kabel vede kabel do modulu  $A$ . Na průniku těchto dvou kabelů se nachází elektronický zámek. Nejdříve je vyslán impulz 1 z modulu  $A$  směrem k zámku. O 10 sekund později je vyslán impulz 2 z modulu  $B$  směrem k zámku rychlostí 54 cm/min. Impulz 3 je vyslán z modulu  $C$  směrem k elektronickému zámku rychlostí o 10 cm/min větší než impulz 2. Jakou rychlostí se musí pohybovat po celou dobu impulz 1 a o kolik sekund později po impulzu 2 byl vyslán impulz 3, aby byly všechny tři impulzy ve stejnou dobu na elektronickém zámku a zkratovaly ho?*

Elektronický zámek se přehřál a rozpadl na dva kusy. Zbývalo vyšplhat ke dveřím, abych se dostala do druhého patra. Rozhodla jsem se vypálit laserem do šachty trojúhelníkové stupínky, abych si trochu procvičila geometrii.

**Úloha 7.** *Určete všechny trojúhelníky s celočíselnými stranami, které mají sudý obvod a stranu délky 1.*

Rukama jsem roztáhla dveře, za kterými se skrývalo druhé patro, a nemohla jsem uvěřit vlastním očím...

POKRAČOVÁNÍ V PŘÍŠTÍ SÉRII



## Zadání Druhé Série

Termín odevzdání: 4. prosince

Když jsem otevřela dveře výtahové šachty, za kterými se nacházelo druhé patro podivné neviditelné budovy, zatajila jsem dech. Nebylo už pochyby, že se jedná o hlavní sídlo profesurovy úhlavní nepřítelkyně, profesorky Paprikové. Předě mnou se rozléhala obrovská laboratoř, plná prosklených místností, z nichž každá byla skoro tak velká, jako celá laboratoř profesora Perikula.

**Úloha 0.** *V jedné z těchto místností byl prováděn opravdu odsouzeníhodný experiment. Popište, o co se jednalo a vytvořte jeho náskres.*

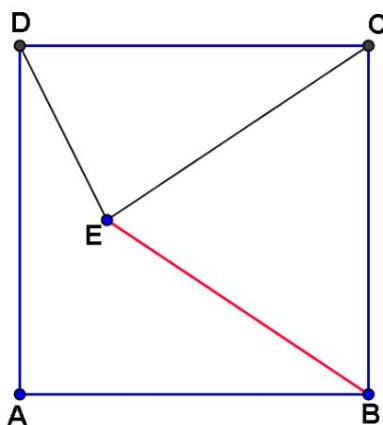
V jedné místnosti bylo připravených pět obrovských laserů, které byly všechny namířené na místo, kde byl nakreslený obrys člověka. Dodnes doufám, že tam kdysi nějaký člověk nestál. Jinde jsem viděla duplikační přístroje, kolem kterých se válely hromady bankovek, v laboratoři byly celé místnosti naplněné zbraněmi, a dokonce jedna klec, kde pobíhala zmutovaná zvířata.

**Úloha 1.** *V kleci se nacházeli třínozí lvorli, pětinozí mravulvi a sedminozí mravouci. Kolik bylo kterých, jestliže zvířat na  $M$  je 10, zvířat obsahujících ve jméně  $l$  je celkem 8, celkový počet nohou je dělitelný třemi a platí, že od dvou druhů je na zahradě stejný počet jedinců?*

Tak moc jsem se soustředila na ubohá zmutovaná zvířata, že jsem si nevšimla, že každý vědec v laboratoři přestal pracovat a zíral na mě. Nebylo divu, vzhledem k tomu, že jsem byla jediná, kdo na sobě neměl bílý laboratorní plášť, a navíc se ukázalo, že v laboratoři nejsou žádné ženy. Čekala bych, že Papriková bude větší feministka.

„Můžu se zeptat, kde máte jmenovku?“ zeptal se jeden z vědců, který se opatrně přibližoval. Rychle jsem se rozhlédla kolem, abych zjistila, jestli má místnost únikový východ. Našla jsem jedno schodiště, ale zdálo se být moc daleko.

**Úloha 2.** *Místnost má půdorys čtverce o straně 60 metrů, jehož vrcholy SARA ve své hlavě popsala jako ABCD. Bod, kde stála SARA, nazvala E a je takový, že velikost úhlu CDE je  $75^\circ$  a velikost úhlu DCE je  $30^\circ$ . Určete vzdálenost SARY od schodiště, které se nachází v bodě B.*



Schodiště bylo přece jenom moc daleko na to, aby mě někdo během útěku nechytil. Musela jsem tedy improvizovat.

„Jmenuju se SAR-“ zarazila jsem se, protože jsem jim rozhodně nechtěla říct své jméno. „-UMANA.“

„Sarumana?“ Prošedivělý vědec vypadal, že mi nevěří jediné slovo.

„Ano, Sarumana Hergeberge. Jsem stážistka doktora-“ nenápadně jsem zaostříla na jeden z pláštů, které visely na věšáku, a přečetla jsem jmenovku: „-doktora Shiraze.“

Chvilí jsem přemýšlela, jestli zločinecké organizace přijímají stážisty, ale došla jsem k názoru, že neplacená práce se hodí každé společnosti.

„Slečno...Hergeberge. Recepce přiřazuje stážistům jmenovku, kde je ta vaše?“ Vědec nevypadal ani zdaleka přátelsky, ale ostatní muže v místnosti jsem přestala zajímat a vrátili se ke své práci.

**Úloha 3.** *SARA zjistila, že číslo na každé jmenovce má tvar  $X_1X_2X_3X_4$ , kde  $X_1, X_2, X_3, X_4$  představují číslice 0–9. Na všech jmenovkách se vyskytuje právě jedna šestka. Kolik takovýchto jmenovek může existovat?*

„Na recepci mi řekli, že jim jmenovky došly a že mi můžete jednu vytisknout. Moje číslo by mělo být 0269.“

Postarší vědec vypadal, že mi konečně uvěřil. „A s tímto kódem jste autorizovala výtah?“

Polkla jsem, protože jsem věděla, že kabina výtahu je v současné době

zaseknutá někde mezi prvním a druhým patrem. „Ano,“ řekla jsem tak sebevědomě, jak jsem jen dokázala.

„Dobře. Doktor Shiraz má tento týden dovolenou, ale najdu vám někoho, kdo vás tu provede, plášť si můžete vzít támhle a jmenovku vám hned.“ Ozvala se ohlušující exploze, ale vzduch se ani nepohnul. Vědec se bez jediného slova rozběhnul směrem do středu místnosti, jako bych přestala existovat. Využila jsem toho, že se nikdo nedívá, a doběhla jsem ke schodišti v jednom z rohů. Vypadalo to, že cesta dolů je uzavřená, takže jsem začala stoupat. Po cestě jsem skrze okno vedoucí zpátky do laboratoře zahlédla všechny vědce, kteří se seběhli do kruhu kolem prosklené polokoule uprostřed místnosti.

**Úloha 4.** *Polokoule má poloměr 5 m. 80% kruhového půdorysu polokoule tvořily podivné symboly. SARA rozeznala, že 50% této plochy je pokryto arabskými znaky, 25% hebrejskými a zbytek byl popsán symboly, které SARA ještě nikdy neviděla. Jakou plochu zabíraly neznámé symboly?*

Uprostřed proskleného prostoru se cosi zmítalo. Bylo to stvoření, které vypadalo jako něco mezi švábem a vážkou, až na to, že bylo velké jako profesorův skútr a stoupal z něho podivný černý dým. Kovově se lesklo všemi barvami, ale jinak působilo jako rozplácnutá moucha, která má před sebou posledních pár sekund života.

„Ukončete experiment,“ řekl bez jediné emoce vědec, který mě ještě před chvílí vyslyšel. Poodešla jsem od okna, aby mě nezahlédl. Teď už jsem oficiálně měla dvě patra, do kterých se nemůžu vrátit, a žádnou možnost úniku. Dobrá práce, SARO.

Stoupala jsem několik minut po schodech vzhůru, když jsem spatřila drobnou skříňku, na které bylo napsáno: „Nejrychlejší připojení v budově, ale našel jsem ho já, takže přístup jen s hádankou ;) D.“

**Úloha 5.** *Digitální zámek může být zajištěn libovolně dlouhým kódem. Pokud vynásobíme číslo o jedno menší, o jedno větší a o čtyři větší, než je kód k zámku, dostaneme číslo rovné součtu třetí mocniny kódu, 4násobku druhé mocniny kódu a dvojnásobku kódu zvětšeného o jedna.*

„Připojení k čemu?“ , pomyslela jsem si. Moje přijímače nenacházely žádné bezdrátové připojení, internet, ani nic podobného. Odemknula jsem zámek a otevřela skříň. Za ní nebylo nic jiného, než obrys ruky z drobných světýlek

a jakýsi konektor uprostřed. Chvilí jsem přemýšlela, jestli všichni pracovníci laboratoře nejsou také roboti, ale potom bych si toho musela všimnout jednak já a určitě by mi neuvěřili, že jsem člověk. Opatrně jsem přiložila ruku na rozhraní. Moje procesory se rozeběhly na plné obrátky, když moji vnitřní paměť zavalila data proudící z konektoru. Jednalo se o jakousi zvláštní podobu internetu, kde byly všechny informace, které lidé znali, ale také všechny výzkumy, které byly kdy vedeny touto společností.

**Úloha 6.** *SARA má ve své paměti místo na 100 terabajtů (TB) dat a přesně 100 souborů. V systému se nachází mapové soubory .mpp, z nichž každý zabírá 6TB, potom obrazové soubory .pix, z nichž jeden zabírá 3TB a nakonec textové soubory .wrd, které mají každý 100 gigabajtů (1 terabajt je 1000 gigabajtů). Kolik souborů od každého druhu musí SARA stáhnout, aby zabíraly přesně 100TB a bylo jich právě 100?*

Protože kopírování souborů je pro super-inteligenční ta nejnudnější práce na světě, tak jsem se bavila tím, že jsem během jedné sekundy vyřešila všechny maturitní otázky na světě, které jsem si kdysi uložila do paměti. Jednou z nich bylo:

**Úloha 7.** *Ukažte, že z libovolných 7 přirozených čísel můžeme vybrat nenulový počet čísel takových, že jejich součet je dělitelný 7.*

Když jsem během dalších pěti sekund vyřešila všechny vysokoškolské testy a prolomila zabezpečení většiny nadnárodních bezpečnostních organizací, zívla jsem a soustředila se zase jenom na kopírování. Už nějakou chvíli jsem byla zaseknutá na dvaceti procentech. Nemám ve zvyku být paranoidní, ale radši jsem zkontrolovala, jestli síť nespustila nějaké bezpečnostní protokoly. Ukázalo se, že spustila. Chtěla jsem rychle oddělat ruku z rozhraní, když jsem si všimla, že mám v ruce hluboko zaseknuto pět kovových svorek připevňujících mě ke konektoru.

POKRAČOVÁNÍ V PŘÍŠTÍ SÉRII